Corrigé

Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples

1. On peut choisir de prendre ou de ne pas prendre chaque élément pour former une somme, soit 2^n possibilités. Mais on s'interdit la somme vide. Il faut donc vérifier que les $2^n - 1$ « vraies » sommes à envisager sont toutes distinctes.

2. Les sommes possibles réalisables avec $\{1,3,5\}$ sont 1, 3, 5, 4, 8, 6, 9 : elles sont toutes distinctes. Avec l'ensemble $\{4,6,7,9\}$ on remarque que $6 + 7 = 4 + 9$.

3. Le singleton $\{0\}$ est un STD. C'est le seul : tout autre ensemble contenant 0 contient un autre élément $a \neq 0$. Mais alors les sommes a et $a + 0$ sont égales.

4.

a. Les sommes formées d'éléments de A sont en particulier des sommes formées d'éléments de B. Elles sont donc toutes distinctes.

b. Par contraposition, B n'est alors pas STD.

5. Pour $A' = A \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$: les sommes n'impliquant que des éléments de A sont toutes distinctes. Les sommes associant $\frac{1}{2}$ aussi (elles sont translatées des précédentes). Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\frac{1}{2}$ serait entier.

Pour $A \cup \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\} = A' \cup \{\sqrt{2}\}$. On sait déjà que A' est STD. Donc on procède comme ci-dessus, avec les sommes n'impliquant que A', les sommes associant $\sqrt{2}$ aussi. Et les deux ensembles de sommes sont disjoints, sans quoi $\sqrt{2}$ serait rationnel.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \ldots + u_n + 1$$

6. On a $u_2 = 1 + 1 = 2$ et $u_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. Puis $u_4 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$ et $u_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 1 = 16$.

7. On peut éviter d'imbriquer une boucle dans une autre et de manipuler des listes, par exemple comme ceci.

```
def STD(n) : # on choisira n=100
    s=0
    u=s+1
    for k in range(n-1):
        s = s + u
        u = s + 1
    return u
```

8. De proche en proche, les termes de la suite u sont tous strictement positifs. Donc $u_{n+1} - u_n = (u_1 + \cdots + u_{n-1}) + 1 > 0$. La suite croît strictement.

9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est STD. On compare deux sommes qui n'impliquent pas exactement les termes. On suppose ces deux sommes égales. On simplifie à gauche et à droite. Les termes qui restent à gauche sont tous distincts de ceux qui restent à droite. Imaginons que la somme de gauche soit celle qui implique le terme de plus haut rang p. On l'isole en basculant tous les autres tout à droite. A droite, on a une somme de termes de la suite, tous distincts, tous de rang $p - 1$ au plus, pondérée de + ou de -. On la majore par la somme avec les +. On la majore encore en introduisant les termes manquants pour faire apparaître tous les indices de 1 à $p-1$. Dès lors $u_p \leq u_1 + \cdots + u_{p-1}$. Or $u_p = u_1 + \cdots + u_{p-1} + 1$. C'est absurde.

10. De proche en proche (c'est une récurrence simple dont on ne demande pas de dire son nom), et par sommation géométrique, $u_n = 2^n$.

Partie 3 : Suites STD

11.

a. On peut créer $2^n - 1$ entiers naturels non nul distincts avec les sommes de $u_1, \dots, u_n$. Or le plus grand de ces entiers est $u_1 + \cdots + u_n$: il est donc supérieur ou égal à $2^n - 1$.

b. Ainsi, puisque $u_2 > u_1$,

$$nu_n > u_1 + \cdots + u_n \geq 2^n - 1$$

Nous comparons des entiers. Donc $nu_n \geq 2^n$, puis $u_n \geq \frac{2^n}{n}$.

12.

a. On a $E(X_1) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $V(X_1) = E({X_1}^2) - \left(E(X_1)\right)^2 = E({X_1}^2) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} 1 = 1$ puis, d'après les formules données dans l'énoncé, $E(X) = 0$ et $V(X) = u_1^2 + \ldots + u_n^2$.

b. Les 2^n sommes de la forme $\pm u_1 \pm \ldots \pm u_n$ sont toutes différentes (par caractère STD, en ajoutant $u_1 + \ldots + u_n$, en divisant par 2, et sachant qu'une somme de u_i est strictement positive). En ajoutant $u_1 + \ldots + u_n$, on obtient des nombres pairs, donc toutes les sommes ont bien même parité. En échangeant les +1 et les -1 pour un tirage donné, on a la symétrie par rapport à l'origine, et, si on atteignait 0, alors en passant les -1 de l'autre côté de l'égalité, cela contredirait le caractère STD de la suite. Enfin, ces 2^n entiers ont la même probabilité $\frac{1}{2^n}$ d'être atteints, d'où le résultat.

c. Puisque X est centrée, $V(X) = E(X^2)$. Or X^2 prend 2^{n-1} valeurs, chacune avec une probabilité $\frac{1}{2^{n-1}}$, ces valeurs étant des carrés d'entiers naturels non nuls distants d'au moins 2 (puisqu'ils ont même parité). Ainsi,

$$V(X) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \geq \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1)^2 \ \left(= \frac{4^n - 1}{3}\right)$$

Or $V(X) = u_1^2 + \cdots + u_n^2 \leq n{u_n}^2$, donc :

$${u_n}^2 \geq \frac{1}{n\, 2^{n-1}} (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2^n - 1)^2)$$

d. Pour $n = 4$, cette inégalité donne $u_4 \geq 4{,}6$ et l'inégalité de la question **11.*b*** donnait $u_4 \geq 4$.